

1. UNIDAD 1: INTRODUCCIÓN

- **Matemáticas Discretas**
- **Datos Históricos y Personajes Célebres**
- **Términos y Definiciones**
- **Estructuras Discretas**

1.1. Matemáticas Discretas

1.1.1. Definición

Las Matemáticas Discretas es un área de las matemáticas encargada del estudio de los conjuntos discretos finitos o numerablemente infinitos y está fuertemente relacionado con los números naturales que es un conjunto numerablemente infinito.

Las Matemáticas Discretas establecen el fundamento teórico para las ciencias de la computación, porque permite computar funciones u operaciones sobre conjuntos numerablemente infinitos.

1.2. Datos Históricos y Personajes Célebres

1.2.1. Aristóteles (384 - 322 A.C.)



Fue un filósofo, polímata y científico nacido en la ciudad de Estagira, al norte de antigua Grecia, es considerado el padre de la Lógica, disciplina capaz de analizar argumentos y determinar su validez mediante las reglas formales del silogismo y escribió el primer tratado de lógica: El Organón, que es un conjunto de obras de lógica, reglas para el razonamiento deductivo, que fueron pensadas para servir como base a toda rama del saber, fue compilada por Andrónico de Rodas siglos más tarde. El Organón consta de las siguientes seis obras: De las categorías, Sobre la interpretación, Refutaciones sofísticas, Primeros analíticos, Segundos analíticos y Tópicos.

1.2.2. Gottfried Wilhelm Leibniz (1/7/1646 – 14/11/1716)



Fue un filósofo racionalista, teólogo, lógico, matemático, jurista, bibliotecario y político nacido en Leipzig, Alemania. Junto a Isaac Newton desarrollaron el Cálculo infinitesimal. Leibniz concibe la idea de que al igual que la notación algebraica sirve para mecanizar el proceso de razonar con números, debería usarse un sistema algebraico para el razonamiento deductivo; es decir, que el razonamiento podría hacerse mediante un sistema de símbolos manipulables por ciertas leyes. En 1985 el gobierno alemán instituyó el premio Gottfried Wilhelm Leibniz, que se entrega anualmente a las contribuciones científicas. En 2006 la Universidad de Hannover fue renombrada “Gottfried Wilhelm Leibniz” en su honor.

1.2.3. Johann Carl Friedrich Gauss (30/4/1777 - 23/2/1855)



Nació en Brunswick, sacro imperio romano germánico, fue matemático, astrónomo, geobotánico y físico. Contribuyó de forma significativa en la consolidación de la teoría de números, el análisis matemático, la geometría diferencial, la estadística, el álgebra, la geodesia, el magnetismo y la óptica. Se cuenta que, a los nueve años durante la clase de aritmética, el maestro propuso el problema de sumar los números del 1 al 100, una progresión aritmética, hallando la respuesta correcta casi inmediatamente, a lo que exclamo: Ligget se “ya está”, al acabar la hora se comprobaron las soluciones del curso y se vio que la solución de Gauss era correcta, en vez de sumar directamente, observó que $100+1 = 99+2 = 98+3 \dots$ es decir, lo que pedía el profesor era equivalente a multiplicar 101×50 . Pronto Gauss fue reconocido como un niño prodigio, a los catorce años fue presentado ante el duque de Brunswick quien quedó fascinado por sus habilidades y educación, por lo que decidió financiar los estudios de niño en el Collegium Carolinum. Por todos sus aportes e

influencia en muchos campos de las matemáticas y de la ciencia Carl Gauss es considerado el Príncipe de las Matemática.

1.2.4. Leonhard Paul Euler (15/4/1707 - 18/9/1783)



Fue un matemático, físico y filósofo nacido en Basilea, Suiza. Vivió en San Petersburgo, Rusia y también en Berlín, Prusia la mayor parte de su vida adulta. Es considerado el principal matemático del siglo XVIII y uno de los más grandes y prolíficos de todos los tiempos quien escribió entre 60 y 80 obras, muy conocido por el número de Euler (e), número que aparece en muchas fórmulas de cálculo y física. En 1736, resolvió el problema conocido como el problema de los puentes de Königsberg del río Pregel, ubicada en la ciudad de Königsberg, Prusia Oriental, actualmente Kaliningrado, Rusia, que tenía dos grandes islas que estaban conectadas entre ellas por un puente, y con las dos riberas del río mediante seis puentes en total. El problema que se planteaban sus habitantes consistía en saber si era posible seguir un camino, que cruzase todos los puentes una sola vez y que finalizase llegando al punto de partida, Euler logró demostrar matemáticamente que no lo hay, debido a que el número de puentes es impar en más de dos bloques, con este aporte Euler dio origen a la teoría de grafos.

1.2.5. Peter Gustav Lejeune Dirichlet (13/2/1806 - 5/5/1859)



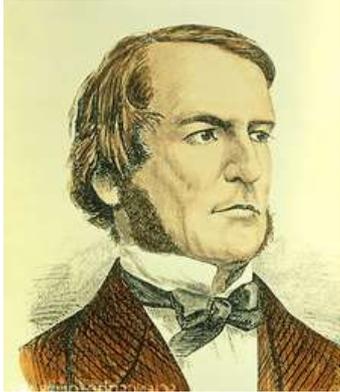
Fue un matemático alemán, que a la edad de dieciséis años después de concluir sus estudios en el colegio, decidió partir a París, donde aprendió de los matemáticos más renombrados de la época, tal como Fourier. A Dirichlet se le atribuye la definición moderna de una función y el desarrollo de teoremas en las áreas de las funciones elípticas en el campo de la teoría de números. Su obra más importante fue establecer los criterios de convergencia de las series de Fourier; aunque es muy conocido por el principio de las casillas o la del palomar que fue enunciado en el año 1834, donde afirma que: Si n palomas se distribuyen en m palomares, y si $n > m$ entonces, al menos habrá un palomar con más de una paloma.

1.2.6. Augustus De Morgan (27/6/1806 - 18/3/1871)



Fue un notable matemático y lógico inglés, nacido en Mayurai, India. Estudio en Trinity College de Cambridge, fue el primer profesor de matemáticas en el University College London, tutor de Augusta Ada Byron, Condesa de Lovelace. Fue autor de las Leyes de De Morgan una de las contribuciones más destacadas de la lógica.

1.2.7. George Boole (2/11/1815 – 8/12/1864)



Fue un matemático y filósofo inglés, inventor del álgebra de Boole, la base de la aritmética computacional moderna. Es considerado como uno de los fundadores del campo de las Ciencias de la Computación. A la par con De Morgan desarrollo la idea de Newton del sistema de símbolos para el pensamiento lógico. Su obra: “Análisis matemático de la lógica” (1847) contiene sus primeras observaciones sobre los vínculos entre la lógica y las matemáticas, muchos consideran esta obra como el acta de nacimiento de la lógica matemática. Una de las afirmaciones más célebres de George Boole respecto de su teoría, dice: “La interpretación de los símbolos 0 y 1 en el sistema numérico de la lógica son: la NADA y el UNIVERSO”. El álgebra de Boole es una técnica para operar las expresiones de la lógica proposicional y una herramienta para analizar y diseñar circuitos eléctricos y electrónicos, esta estructura algebraica permite esquematizar las operaciones y funciones lógicas, asignando el valor de 0 para Falso y 1 para Verdadero. Fue utilizada por primera vez por Claud Shannon en el año 1948, para diseñar circuitos de conmutación

elétrica biestable (flip-flop), circuitos que son capaces de mantener el estado de 0 o 1 por un tiempo indefinido.

1.2.8. Georg Ferdinand Ludwing Philipp Cantor (3/3/1845 - 6/1/1918)



Fue un matemático y lógico Ruso, nació en San Petersburgo, aunque de ascendencia alemana y judía, invento con Dedekind y Frege de la teoría de conjuntos, que es la base de las matemáticas modernas. Gracias a sus atrevidas investigaciones sobre los conjuntos infinitos fue el primero capaz de formalizar la noción de infinito bajo la forma de los números transfinitos (cardinales y ordinales).

Vivió aquejado por episodios de depresión, atribuidos originalmente a las críticas recibidas y sus fallidos intentos de demostración de la hipótesis del continuo.

1.2.9. Giuseppe Peano (27/8/1858 - 20/4/1932)



Nació en una granja cerca de Spinetta, Italia, fue matemático, lógico y filósofo, conocido por sus contribuciones a la lógica matemática y la teoría de números. Peano publicó más de doscientos libros y artículos, la mayoría sobre matemáticas. La mayor parte de su vida la dedicó a la enseñanza en la universidad de Turín, donde se formó académicamente. En 1887 publicó su primer libro sobre lógica matemática y fue el primero en usar los símbolos modernos para la unión e intersección de conjuntos. En 1898 presentó una nota a la Academia acerca del sistema de numeración binario y su capacidad para ser usado para representar los sonidos de las lenguas. Sus aportaciones más memorables hacen referencia a los axiomas sobre el conjunto de los números enteros naturales o sobre la estructura de un espacio vectorial, así como la definición del concepto de aplicación lineal. En un momento dado, Peano se frustró tanto con las demoras en las publicaciones, que decidió comprarse una imprenta.

1.2.10. Alonzo Church (14/6/1903 - 11/8/1995)



Nació en la ciudad de Washington, Estados Unidos. Matemático, lógico y profesor de la Universidad de Princeton y de California. Se especializó en lógica matemática, metalógica y metamatemática, su obra más conocida es el desarrollo del cálculo lambda y su trabajo de 1936 que muestra la existencia de problemas indecidible, trabajo que precedió al trabajo de su alumno Alan

Mathison Turing sobre el problema de parada, que también demostró la existencia de problemas irresolubles por dispositivos mecánicos. Luego de revisar la tesis doctoral de Turing, demostraron que el cálculo lambda y la máquina de Turing utilizada para expresar el problema de parada tenían igual poder de expresión y como resultado se postuló la Tesis de Church-Turing que formula hipotéticamente la equivalencia entre los conceptos de función computable y máquina de Turing, que establece que “Todo algoritmo matemático es equivalente a una máquina de Turing”. No es un teorema matemático, es una afirmación indemostrable, pero no obstante tiene una aceptación prácticamente universal. El cálculo lambda influyó

en el diseño del lenguaje Lisp, así como en los lenguajes de programación funcional.

1.2.11. Jhon Von Neuman (28/12/1903 - 8/2/1957)



Nació en Budapest, Imperio Autrohúngaro, bajo el nombre de Neumann János Lajos. Fue el mayor de tres hermanos, a los diez años comenzó a estudiar en el Colegio Luterano de Budapest, pronto sus profesores se dieron cuenta de su talento y recomendaron que recibiera clases particulares de matemáticas impartidas por profesores universitarios. Realizó contribuciones fundamentales en física cuántica,

análisis funcional, teoría de conjuntos, teoría de juegos, ciencias de la computación, economía, análisis numérico, cibernética, hidrodinámica, estadística y muchos otros campos. Entre las aportaciones más relevantes citamos las siguientes: en la Teoría de Números fue la definición de Número ordinal (teoría de conjuntos), en la computación el modelo de arquitectura de computadoras Von Neumann donde un computador personal, microcomputador, minicomputador y supercomputador es una máquina Von Neumann, el algoritmo de ordenamiento Merge Sort, el campo de los autómatas celulares sin computadores construyendo los primeros ejemplos de autómatas autorreplicables con lápiz y papel, donde el concepto de constructor universal fue presentado en su trabajo póstumo

“Teoría de los autómatas autorreproductivos”. A Von Neumann se lo considera uno de los matemáticos más importantes del siglo XX.

1.2.12. Kurt Friedrich Gödel (28/4/1906 - 14/1/1978)



Nació en Brünn, Imperio Austrohúngaro, actual República Checa, fue un lógico, matemático y filósofo. Se le considera uno de los lógicos más importantes de todos los tiempos, su trabajo ha tenido un impacto inmenso en el pensamiento científico y filosófico del siglo XX. Gödel empleó la lógica y la teoría de los conjuntos para comprender los fundamentos de la matemática. A los 25 años probó que en todo sistema axiomático que incluye a los enteros hay proposiciones metamatemáticas que no pueden probarse o refutarse (Indecidibles) mediante deducciones formales basadas en los axiomas del sistema, el “Teorema de la Incompletitud de Gödel” fue publicado en 1931, un año después de finalizar su doctorado en la Universidad de Viena. Fue doctor honorario en Ciencias por la Universidad de Harvard en 1952 con una mención que lo llamó “El descubridor de la verdad matemática más significativa del siglo”.

1.2.13. Alan Mathison Turing (23/6/1912 - 7/6/1954)



Nació en Paddington, Londres, fue un matemático, lógico, científico de la computación, criptógrafo, filósofo, biólogo teórico, maratoniano y corredor de ultradistancia. Se le considera uno de los padres de la Ingeniería informática siendo el precursor de la informática moderna y la inteligencia artificial. Proporcionó una influyente formalización de los conceptos de algoritmo y computación en la máquina de Turing, una máquina capaz de resolver cualquier problema matemático que pueda representarse mediante un algoritmo. Con estos fundamentos el ingeniero alemán Konrad Zuse diseñó el primer computador electromecánico binario, el Z1 en el año 1936. Turing también contribuyó de forma particular a responder la pregunta de que, si las máquinas pueden pensar, en su ensayo “Computing Machinery and Intelligence” en 1950 mientras trabajaba en la Universidad de Mánchester. En su honor la Association for Computing Machinery entrega anualmente el Premio Turing a las personas que destacan por sus contribuciones técnicas al mundo de la computación.

1.3. Términos y Definiciones de las Matemáticas Discretas

1.3.1. Teoría de la Información

La Teoría de la Información estudia los métodos y técnicas de codificación, cifrado, transmisión, almacenamiento y cuantificación de la información.

La teoría de la información contempla el diseño e implementación de métodos eficientes y confiables para garantizar la persistencia y disponibilidad de información.

1.3.2. Informática Teórica

La Informática Teórica se apoya en las matemáticas discretas para establecer los fundamentos teóricos de la información y computación en el desarrollo de los sistemas de información.

Las especificaciones conceptuales de los sistemas de información están altamente vinculadas con la lógica simbólica, la lógica proposicional, la

lógica de predicados, el álgebra de Boole, la teoría de conjuntos, la teoría de grafos, la teoría de algoritmos, la teoría de autómatas, los lenguajes formales, la dinámica de los procesos sistémicos, la geometría computacional y el análisis, procesamiento, representación y despliegue de las imágenes digitales.

1.3.3. Computabilidad

La Computabilidad estudia todo lo que puede ser computado y está relacionado fuertemente con la lógica.

1.3.4. Complejidad Computacional

La Complejidad Computacional estudia el tiempo que se requiere para realizar un determinado cálculo u operación.

La Complejidad computacional trata de clasificar los problemas que pueden, o no pueden ser resueltos con una cantidad determinada de recursos y utilizando métodos algorítmicos.

1.3.5. Lógica

La Lógica estudia los principios del razonamiento válido y la inferencia, que consiste en realizar una evaluación a las proposiciones para determinar su implicación lógica y establecer una conclusión.

1.4. Estructuras Discretas de las Matemáticas Discretas

1.4.1. Lógica Matemática

La Lógica Matemática, también llamada lógica simbólica o lógica formal, es el estudio matemático de la lógica y su aplicación a otras áreas de la matemática y la ciencia.

La Lógica Matemática consiste en la aplicación de las técnicas de la lógica formal a las matemáticas basadas en el razonamiento matemático.

La Lógica Matemática estudia la inferencia mediante la construcción de sistemas formales como la lógica proposicional y la lógica de primer orden. Estos sistemas capturan las características esenciales de las inferencias válidas en los lenguajes naturales, al ser estructuras formales susceptibles de análisis matemático, permiten realizar demostraciones sobre ellas.

1.4.2. Teoría de Números

La Teoría de Números estudia las propiedades de los números en general y particularmente de los números enteros (\mathbb{Z}). Tiene aplicaciones en la criptografía, criptoanálisis y criptología, que están íntimamente relacionados con los números primos.

Otro aspecto de la Teoría de Números incluye la teoría geométrica de números, la teoría analítica de números y las técnicas de matemática continua.

1.4.3. Combinatoria

La combinatoria es la rama de la matemática que estudia colecciones finitas de objetos que pueden ser combinados u ordenados.

La combinatoria enumerativa se ocupa, en particular, del recuento de los objetos de dichas colecciones.

La combinatoria analítica se concentra en la enumeración de estructuras combinatorias utilizando herramientas de análisis complejo y teoría de probabilidad.

1.4.4. Teoría de Conjuntos

La Teoría de Conjuntos es una rama de la lógica matemática que estudia las propiedades y relaciones de los conjuntos, que son colecciones abstractas de objetos homogéneos o heterogéneos.

1.4.5. Teoría de Grafos

En matemáticas y en ciencias de la computación, la Teoría de Grafos es una de las ramas de las matemáticas que estudia las propiedades de los grafos; donde un grafo está constituido por un conjunto no vacío de objetos llamados vértices o nodos y un conjunto de pares ordenados de vértices llamados aristas, que pueden o no tener una dirección o sentido. Un grafo, gráficamente se representa mediante una serie de puntos conectados por líneas.

1.5. Lenguajes Formales

Los Lenguajes Formales son una descripción teórica propia de un campo de estudio y están constituidos por conceptos y elementos, tales como:

1.5.1. Símbolo

Símbolo es el componente indivisible y elemental con el que se compone un alfabeto. Por ejemplo:

a, u, e, Y, z, B, 5, [,), *, +, -, /,], (, ^, λ, L, ...

1.5.2. Alfabeto

Un Alfabeto Σ es un conjunto finito no vacío; a sus elementos se los llama símbolos o letras. Por ejemplo:

$$\Sigma_1 = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$$

$$\Sigma_2 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$\Sigma_3 = \text{"El alfabeto del lenguaje JAVA"}$$

$$\Sigma_4 = \text{"El alfabeto del lenguaje PYTHON"}$$

$$\Sigma_5 = \{x/x \text{ es alumno universitario}\}$$

$$\Sigma_6 = \{x/x \in \mathbb{N}\}$$

1.5.3. Palabra

Palabra es una sucesión finita de símbolos de Σ . Una secuencia finita de letras o símbolos que pertenecen a un alfabeto. Por ejemplo:

abc: Es una palabra definida sobre Σ_1

135: Es una palabra definida sobre Σ_2

import: Es una palabra definida sobre Σ_3 y Σ_4

carlos: Es una palabra definida sobre Σ_5

01357: Es una palabra definida sobre Σ_6

1.5.4. Lenguaje

Lenguaje es la capacidad que permite a las personas o dispositivos electrónicos de comunicarse con el medio con el que interactúa.

Un Lenguaje es un conjunto de palabras que está compuesto por una secuencia de símbolos tomados de una colección finita de símbolos.

Un Lenguaje es un conjunto de palabras o sentencias formadas sobre un alfabeto.

Existen dos tipos básicos y reconocidos de Lenguajes:

- **Lenguajes naturales**, que se desarrollaron sin el control de ninguna teoría científica, su sintaxis y su gramática fueron establecidos después de que el lenguaje ya había madurado; por ejemplo, el castellano, el inglés, el francés, el alemán, ...
- **Lenguajes formales**, son el resultado del establecimiento de una teoría científica previa, que define las bases para su uso, aplicación y análisis dentro de un campo de estudio definido; por ejemplo, la lógica, la matemática, la química, la genética, la física cuántica...

Lenguaje $L(\Sigma)$: Es cualquier subconjunto del universo del alfabeto Σ ó $W(\Sigma)$ ó Σ^* , y por lo tanto puede ser también infinito.

Supongamos el alfabeto:

$$\Sigma = \{a, b, c, d, e, o, f, g, h, i\}$$

Los posibles lenguajes de ese alfabeto podrían ser:

$$L_1(\Sigma) = \{\lambda, aa, bb, cc, dd, ff, hh, aaa, bbb\}$$

$$L_2(\Sigma) = \{ba, ca, da, fa, ga, ha\}$$

$L_3(\Sigma) = \{faca, daba, higo, beba, gabi, fea, ciega\}$

1.5.5. Gramática, Semántica, Morfología, Sintaxis y Fonética

La Gramática es el estudio de la estructura de las palabras y sus accidentes, establece un conjunto de normas y reglas para hablar, escribir y comprender correctamente las palabras dentro de una oración o frase. El análisis de la gramática incluye la sintaxis, la semántica, la morfología y la fonología.

- La **Sintaxis** estudia la forma correcta de combinar las palabras para formar frases correctas.
- La **Semántica** estudia el significado, sentido e interpretación de las palabras, oraciones o frases.
- La **Morfología** estudia las formas y constitución que toman las palabras.
- La **Fonética** estudia las propiedades del lenguaje hablado (fonética).

1.6. Panorama de las Matemáticas Discretas

La aplicación de las Matemáticas Discretas en la actualidad es muy variada y más aún cuando el desarrollo humano ha alcanzado la cuarta revolución industrial, donde las tecnologías de la información y comunicación están inmersas en las actividades humanas; como ejemplos de la aplicación de las Matemáticas Discretas a las actividades humanas citamos las siguientes:

- Prueba automática de teoremas
- Razonamiento automático
- Inferencia probabilística
- Seguridad informática y criptografía
- Gestión de Bases de datos
- Gestión de la logística
- Desarrollo de algoritmos
- Definición formal de protocolos de comunicación
- Predicciones de marketing
- Verificación automática de circuitos digitales
- Representación de estructuras formales

- Establecimiento de leyes para mundos virtuales
- Ver los siguientes videos:
 - Ciencias de la Computación - Aplicaciones (2min 8seg)
 - Matemáticas e Informática (41min 38seg)