Indeterminación 0/0 . Ejercicios de límites resueltos 6.2

Límite de una función en un punto

Posibilidades

a) Obtener solución directamente.

b) Obtener la indeterminación $\boxed{\frac{0}{0}}$ .Tipos $\Rightarrow \begin{cases} \text{Con polinomios: factorizamos y simplificamos.} \\ \text{Con raices: utilizamos el conjugado.} \end{cases}$

c) Indeterminación $\boxed{\frac{k}{0}}$ Límites laterales, solución $\pm\infty$. **Asíntotas verticales.**

d) Funciones definidas "a trozos" . Limites laterales finitos. Lo vemos en continuidad.

a) Obtener solución directamente.

$$\lim_{x\to 2} x^2 \Rightarrow \lim_{x\to 2} x^2 = 2^2 = 4$$

b) Indeterminación $\frac{0}{0}$

Funciones racionales con polinomios : descomponemos en factores y simplificamos.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-2x^2-6x+12}{x^2+3x-10} \Rightarrow \lim_{x\to 2} \frac{x^3-2x^2-6x+12}{x^2+3x-10} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminación}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-2x^2-6x+12}{x^2+3x-10} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2-6)}{(x-2)(x+5)} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-6}{x+5} = \frac{-2}{7}$$

Funciones racionales con raices : multiplicamos y dividimos por el conjugado de la raíz.

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2x} \Rightarrow \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2x} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminación}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{\left(\sqrt{x^2+5}-3\right)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}{\left(x^2-2x\right)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{\left(x^2-2x\right)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x\,(x-2)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)} =$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x+2)}{x\,\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Ejercicios de límites resueltos

1. $\lim_{x\to\infty} 5x^3+7x \Rightarrow \lim_{x\to\infty} 5x^3+7x = \lim_{x\to\infty} 5x^3 = \lim_{x\to\infty} 5\cdot\infty = \infty$

2. $\lim_{x\to -\infty} -\frac{1}{x^2} \Rightarrow \lim_{x\to -\infty} -\frac{1}{x^2} = \lim_{x\to -\infty} -\frac{1}{\infty} = 0$

3. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-5}{-x^2-4} \Rightarrow \dots \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{x^3-5}{-x^2-4} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{-x^2} = = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{-1} = -\infty$

4. $\lim_{x\to\infty} \frac{4x^3-2}{\sqrt{x}-3} \Rightarrow \dots \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{4x^3-2}{\sqrt{x}-3} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x^3 \text{ grado } 3}{\sqrt{x} \text{ grado } 1/2} = \infty$

5. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2x}{4x^2-4} \Rightarrow \dots \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2x}{4x^2-4} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{4x^2} = \frac{1}{4}$

6. $\lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x+3}{x-2}} \Rightarrow \dots \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x+3}{x-2}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x}{x}} = 1$

7. $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^5}+2x-6}{x^3-4x+2} \Rightarrow \dots \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^5}+2x-6}{x^3-4x+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^5} \text{ grado } 5/2}{x^3 \text{ grado } 3} = 0$

8. $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+3x}-x \Rightarrow \dots \infty-\infty$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+3x}-x = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+3x}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+3x}+x\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+3x}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3x-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x}{x+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}$$

9. $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x+2}-\sqrt{x-2} \Rightarrow \dots \infty-\infty$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x+2}-\sqrt{x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}\right)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x+2}\right)^2-\left(\sqrt{x-2}\right)^2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+2-x+2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}} = \frac{4}{\infty} = 0$$

10. $\lim_{x\to 0} [1+3x]^{2/x} \Rightarrow \lim_{x\to 0} [1+3x]^{2/x} \Rightarrow 1^{\infty}$

$$\lim_{x\to 0} [1+3x]^{2/x} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{2}{x}\left[(1+3x)-1\right]} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{2\cdot 3x}{x}} = e^6$$

11. $\lim_{x\to 2} \frac{5x}{x-3} \Rightarrow \lim_{x\to 2} \frac{5x}{x-3} = \frac{10}{-1} = -10$

12. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} \Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} x+1 = 2$

Ejercicios resueltos de continuidad de funciones

1

Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

1 $$f(x)=\frac{5}{x^4-16}$$

La función es continua en todos los puntos de su dominio.

D = R− {−2,2}

La función tiene **dos puntos de discontinuidad en x = −2 y x = 2.**

2 $$f(x)=\frac{x-7}{x^3-x^2-11x+3}$$

La función es continua en toda R menos en los valores que se anula el denominador, si igualamos éste a cero y resolvemos la ecuación obtendremos los puntos de discontinuidad.

$$x^3-x^2-11x+3=0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & -11 & 3 \\ -3 & & -3 & 12 & -3 \\ \hline & 1 & -4 & 1 & 0 \end{array}$$

x = −3; y resolviendo la ecuación de 2º grado obtenemos también: $x=2-\sqrt{3}$ y $x=2+\sqrt{3}$

La función tiene **tres puntos de discontinuidad en $x=-3$, $x=2-\sqrt{3}$ y $x=2+\sqrt{3}$**

3 $$f(x)=\begin{cases} x+1 & si\ x<2 \\ 2x-1 & si\ x\geq 2 \end{cases}$$

$$f(2)=3$$

$$\lim_{x\to 2^-}(x+1)=3$$

$$\lim_{x\to 2^+}(2x-1)=3$$

La función es continua en toda $\mathbb{R}$

4 $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & si\ \ x\le 0 \\ 2x-3 & si\ \ x>0 \end{cases}$

$$f(0)=-1$$

$$\lim_{x\to 0^-}(x^2-1)=-1$$

$$\lim_{x\to 0^+}(2x-3)=-3$$

|−1 − (−3)| = 2

La función es **discontinua inevitable de salto 2 en x = 0** .

5 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & si\ \ x<1 \\ \sqrt{x+1} & si\ \ x\ge 1 \end{cases}$

$$f(1)=\sqrt{2}$$

$$\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{1}{x}\right)=1$$

$$\lim_{x\to 1^+}\sqrt{x+1}=\sqrt{2}$$

En x = 1 hay una discontinuidad de salto finito.

6 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^x}{e^x+1} & si\ \ x\le 0 \\ x^2+1 & si\ \ x>0 \end{cases}$

$$f(0)=\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)=\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^2+1=1$$

La función es **discontinua inevitable de salto 2/3 en x = 0**.

Estudia la continuidad de f(x) en x = 0.

$$f(x)=\begin{cases} x^{\frac{1}{x}} & si \ x>0 \\ 0 & si \ x=0 \end{cases}$$

f(0)=0

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}}=0^{\frac{1}{0^+}}=0^{\infty}=0$$

$$\nexists \lim_{x\to 0^-} x^{\frac{1}{x}}$$

En x = 0 hay una discontinuidad esencial.

Estudia, en el intervalo (0,3), la continuidad de la función:

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & si \ \ 0<x<1 \\ 0 & si \ \ 1\le x<2 \\ x-1 & si \ \ 2\le x<3 \end{cases}$$

Sólo hay duda de la continuidad de la función en los puntos x = 1 y x = 2, en los que cambia la forma de la función.

$f(1) = 0$

$\lim_{x \to 1^-} x^2 = 1$

$\lim_{x \to 1^+} 0 = 0$

En x = 1 tiene una discontinuidad de salto 1.

$f(2) = 1$

$\lim_{x \to 2^-} 0 = 0$

$\lim_{x \to 2^+} x - 1 = 1$

En x = 2 tiene una discontinuidad de salto 1.

Son continuas las siguientes funciones en x = 0?

1 $f(x) = 2^{-x}$

$f(0) = 2^{-0} = \frac{1}{2^0} = 1$

$\lim_{x \to 0^-} 2^{-x} = 2^{-0^-} = 2^0 = 1$

$\lim_{x \to 0^+} 2^{-x} = 2^{-0^+} = \frac{1}{2^0} = 1$

La función es continua en x = 0.

2 $f(x) = \begin{cases} -x & si \quad x \leq 0 \\ \log x & si \quad x > 0 \end{cases}$

$f(0) = -0 = 0$

$\lim_{x \to 0^-} -x = 0$

$$\lim_{x \to 0^+} \log x = -\infty$$

En x = 0 hay una discontinuidad de salto infinito.

Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 25}{x - 5} & Si \ \ x \neq 5 \\ 0 & Si \ \ x = 5 \end{cases}$$

1 Demostrar que f(x) no es continua en x = 5.

f(5) = 0.

$$\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5} = \frac{0}{0}$$

Resolvemos la indeterminación:

$$\lim_{x \to 5} \frac{(x+5)(x-5)}{(x-5)} = \lim_{x \to 5} (x+5) = 10$$

f(x) no es continua en x = 5 porque:

$$\lim_{x \to 5} f(x) \neq f(5)$$

2¿Existe una función continua que coincida con f(x) para todos los valores x ≠ 5? En caso afirmativo dar su expresión.

Si $\lim_{x \to 5} f(x) = f(5) = 10$ la función sería continua, luego la función redefinida es:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 25}{x^2 + 25} & Si \ \ x \neq 5 \\ 10 & Si \ \ x = 5 \end{cases}$$

Calcular el valor de a para que la función siguiente sea continua:

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & si\ \ x\le 1 \\ 3-ax^2 & si\ \ x>1 \end{cases}$$

$$f(1)=2$$

$$\lim_{x\to 1^-}(x+1)=2$$

$$\lim_{x\to 1^+}(3-ax^2)=3-a$$

$$3-a=2 \qquad\qquad a=1$$

La función definida por:

$$f(x)=\begin{cases} \sqrt{ax} & Si\ \ 0\le x\le 8 \\ \dfrac{x^2-32}{x-4} & Si\ \ x>8 \end{cases}$$

es continua en [0, ∞).

Hallar el valor de ***a*** que hace que esta afirmación sea cierta.

$$\lim_{x\to 8^-}\sqrt{ax}=\sqrt{8a}$$

$$\lim_{x\to 8^+}\frac{x^2-32}{x-4}=8$$

$$\sqrt{8a}=8 \qquad\qquad a=8$$

REPRESENTA GRÀFICAMENT LES SEGÜENTS FUNCIONS:

$$A)\; f(x)=\frac{x^2-1}{3x^2-9}$$

$$b)\; f(x)=\frac{4x-2}{5x-1}$$

$$c)\; f(x)=\frac{5}{x-2}+5$$

$$d)\; f(x)=3x^2-3$$

$$e)\; f(x)=\frac{5x^2-2}{x-3}$$

$$f)\; f(x)=\log\sqrt{2x-6}$$

$$g)\; f(x)=\log(2x-1)$$

$$h)\, h(x)=\log(\frac{1}{x})$$

CALCULA ANALÍTICAMENT LES FUNCIONS INVERSES DE :

$$A)\; f(x)=\frac{x^2-1}{3}$$

$$b)\; f(x)=\frac{4}{5x-1}$$

$$c)\; f(x)=\frac{5}{x-2}+5$$

$$d)\; f(x)=3x^2-3$$

$$e)\; f(x)=\sqrt[5]{x-1}$$

$$f)\; f(x)=\log\sqrt{2x-6}$$

$$g)\; f(x)=\log(2x-1)$$

$$h)\, h(x)=\log(\frac{1}{x})$$

$$i)\; f(x)=e^{x^3-2}$$

PROBLEMA :

Un element radioactiu presenta una vida mitjana de 1520 anys. Es desitja calcular:

$$N(t)=N_0 * e^{-\lambda t}$$

a) Quina es la seva constant de desintegració radioactiva.
b) Quina és la quantitat de nuclis actius (%) que quedarà d’una mostra original, amb 500, quan hagin passat 350 anys?
c) Quant temps ha de pasar perquè només en quedin 200?

4.- La constant de desintegració radioactiva del Radio (isòtop descubert perMarie Curie i pel qual va rebre el premi Nobel de física) és de 0,00042 $anys^{-1}$. Tenint present que la llei de desintegració radioactiva és:

$$N(t) = N_0 * e^{-\lambda t}$$

On λ és la constant radioactiva del material, i N el nombre d'àtoms actius en un determinat moment del temps, i N_0 el nombre d'àtoms inicials radioactius, que en aquest cas será de 500. Es demana determinar:

a) Quants àtoms actius quedaran quan hagin transcorregut 300 anys?
b) Quants àtoms actius quedaran transcorregut 1000 anys?
c) Quina és la vida mitjana del Radi?
d) Quin temps ha de transcòrrer perquè la mostra sigui inactiva? Sota el criteri de que es considera inactiva quan el nombre d'atoms és una milionéssima dels inicials.